数理解析研究所講究録
926 巻 1995 年 21-29

実代数曲線の位相的性質と、対合付格子の不変量の間の対応

齋藤　幸子　(Sachiko Saito)
（北海道教育大学　函館校）

bidegree (4,4) の（非特異）実代数曲線で分岐する $\boldsymbol{P}^1 \times \boldsymbol{P}^1$ の 2 重被覆 Y を考え、$\boldsymbol{P}^1 \times \boldsymbol{P}^1$ 上の複素共役の Y への持ち上げ（2つ）のうちのひとつを T とする。いま、

$$L = H^2(Y, \boldsymbol{Z}), \qquad \phi = T^* : L \to L$$

とおく。Yは $K3$ 曲面なので（[4] 参照）、L は free で rank22、その上の交点形式は unimodular で signature$(3,19)$ である。e_1 (resp. e_2) を、$[\infty \times \boldsymbol{P}^1]$ (resp. $[\boldsymbol{P}^1 \times \infty]$) の $L = H^2(Y, \boldsymbol{Z})$ への引き戻しとすると、

$$e_1 \cdot e_1 = 0, \quad e_1 \cdot e_2 = 2, \quad e_2 \cdot e_2 = 0$$

である。また、e_1, e_2で生成される L の部分群 Sは L に primitive に埋め込まれており、$\phi = T^*$は S上では$-$id として作用している。$\theta = \phi|_S$とおく。

そこで、一般に、Sを lattice (=有限生成自由アーベル群で整数値対称双一次形式を持つもの)、θを involution of S (homomorphism で form を保つとする) とし、Sをϕもこめて primitive に埋め込めるような lattice with involution (L, ϕ) をすべて求めることを考える。

L は nondegenerate lattice と仮定し、i を埋め込み $S \to L$ とおくとき、Nikulin の論文 [8] では、3 対

$$(L, \phi, i)$$

を involution (of a lattice) with condition (S, θ) と呼び、その「genus」(これは isomorphism class よりやや大きい同値類であるが) を表すのに必要十分な不変量系を導き出し、さらに、その不変量系の値をとる involution with condition が存在するための必要十分条件を、その不変量系の間のいくつかの関係式によって表している。([8,Theorem1.8.3] を見よ)

involution with condition (L,ϕ,i) に対し、$L_+=\{x|\phi(x)=x\}$, $L_-=\{x|\phi(x)=-x\}$ とおき、L_+に制限した form の signature を $(t_{(+)},t_{(-)})$ とおく（我々の場合 $t_{(+)}=1$ ）。L_+^*/L_+は、$\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$の何個かの直和に同型であるが、$a$ 個であるとする。前述の [8,Theorem1.8.3] には、Condition1.8.1 と Condition1.8.2 という 2 つの条件が述べられているが、そこに出てくる不変量の定義はかなり煩雑で難解なものである。しかし我々の場合、前述のように、Sは、行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

で表される nondegenerate lattice 、$\theta=-\mathrm{id}$ という単純なものである。Condition1.8.1 と Condition1.8.2 に従って書き下した結果、かなりの不変量が一定の値となったり他の不変量に吸収されて不要となり、結局、「3 つの type: Type0, TypeIa, TypeIb に区別する」ということと、3 つの不変量

$$a, \quad t(-), \quad H_-$$

によって genus を表せることがわかった。そして、存在し得るすべての値を後の表にまとめた。H_-の定義（まさに condition が反映される）については、[8] を見られたい。

表中の A, A', B, C という欄に、その不変量の値をとり得るような bidegree (4,4) の非特異実代数曲線（の実部）の$\boldsymbol{RP}^1\times\boldsymbol{RP}^1$ における isotopy 型（の候補）を挙げている。（これは、[5],[6],[3],[1],[7],[2] 等の結果から得られる）1 つの行に 2 つ以上の isotopy 型の挙がっているものについては、もっと詳しい幾何的考察によって最小に限定したい。「$\boldsymbol{RP}^1\times\boldsymbol{RP}^1$における isotopy 型」（注意：これは [6] にすべて調べられている）は、例えば「曲線の実部が曲線の中にどのように入っているか」といった involution に関係する性質については十分な情報を与えないので、involution with condition の genus との 1 対 1 対応は、もとより期待していない。genus との 1 対 1 対応が期待されるのは、bidegree(4,4) の実 2 重斉次多項式（非特異）の係数空間の連結成分である。（"rigid isotopic class" と呼ばれる ([9]) ）

表中に「該当する曲線がない」という genus があるが、書き下しのミスか？　解明してみたい。

Type0　 δφ=0　　　この時δφh =1

a	t(-)	H-	A	A'	B	C
0	1	0	118			
0	9	0	154			
0	17	0	19			
2	1	0	8			
2	1	e1	8		118	
2	1	e2	8		118	
2	1	h		19		118
2	1	S-		19		118
2	5	h				1216
2	5	0	125			
2	9	0	143			
2	9	e1	143		1414	
2	9	e2	143		1414	
2	9	h		154		1414
2	9	S-		154		1414
2	13	h				1612
2	13	0	161			
2	17	e1			181	
2	17	e2			181	
2	17	h		118		181
2	17	S-		118		181
4	5	0	114			
4	5	e1	114		1115	
4	5	e2	114		1115	
4	5	h		161		1115
4	5	S-		161		1115
4	9	0	132			
4	9	e1	132		1313	
4	9	e2	132		1313	
4	9	h		143		1313
4	9	S-		143		1313
4	13	e1	15		1511	
4	13	e2	15		1511	
4	13	h		125		1511
4	13	S-		125		1511
4	17	S-		8		
6	9	0	1111d, 121			
6	9	e1	1111d, 121		1212	
6	9	e2	1111d, 121		1212	
6	9	h		132		1212
6	9	S-		132		1212
6	13	S-		114		141
8	9	0	該当する曲線がない			
8	9	e1			*1111	
8	9	e2			*1111	
8	9	h		1111d		*1111d
8	9	S-		1111d		*1111d
10	9	e1	φ			
10	9	e2	φ			
10	9	h	φ			
10	9	S-	φ			

Typela　　$\delta\phi$=1　　$\delta\phi$S=0

この時 characteristic element は、H-の nonzero element

a	t(-)	H-	A	A'	B	C
2	1	e1	8		118	
2	1	e2	8		118	
2	3	h				1117
2	7	h				1315
2	9	e1	143		1414	
2	9	e2	143		1414	
2	11	h				1513
2	15	h				1711
2	17	e1			181	
2	17	e2			181	
4	3	h		17		116
4	3	h		17		116
4	5	e1	114		1115	
4	5	e2	114		1115	
4	7	h		152		1214
4	7	h		152		1214
4	9	e1	132		1313	
4	9	e2	132		1313	
4	11	h		134		1412
4	11	h		134		1412
4	13	e1	15		1511	
4	13	e2	15		1511	
4	15	h		116		161
4	15	h		116		161
6	5	e1	4		114	
6	5	e2	4		114	
6	7	h		141		1113
6	7	h		141		1113
6	9	e1	121		1212	
6	9	e2	121		1212	
6	11	h		123		1311
6	11	h		123		1311
6	13	e1			141	
6	13	e2			141	
8	7	h		13		112
8	7	h		13		112
8	9	e1	11		1111	
8	9	e2	11		1111	
8	11	h		112		121
8	11	h		112		121
10	9	e1			11, *11	
10	9	e2			11, *11	

Typelb　　$\delta\phi$=1　　$\delta\phi$S=1

a	t(-)	H-	A	A'	B	C
1	0	0	9			
1	2	0	117			
1	8	0	144			
1	10	0	153			

1	16	0	18			
2	1	0	8			
2	3	0	116			
2	7	0	134			
2	9	0	143			
2	11	0	152			
2	15	0	17			
3	2	0	7			
3	2	e1	7		117	
3	2	e2	7		117	
3	2	h		18		117
3	2	S−		18		117
3	4	0	115			
3	4	h				1116
3	6	0	124			
3	6	h				1215
3	8	0	133			
3	8	e1	133		1314	
3	8	e2	133		1314	
3	8	h		153		1314
3	8	S−		153		1314
3	10	0	142			
3	10	e1	142		1413	
3	10	e2	142		1413	
3	10	h		144		1413
3	10	S−		144		1413
3	12	0	151			
3	12	h				1512
3	14	0	16			
3	14	h				1611
3	16	e1			171	
3	16	e2			171	
3	16	h		117		171
3	16	S−		117		171
3	18	S−		9		
4	3	0	6			
4	3	e1	6		116	
4	3	e2	6		116	
4	3	h		17		116
4	3	S−		17		116
4	5	0	114			
4	5	h				1115
4	7	0	123			
4	7	e1	123		1214	
4	7	e2	123		1214	
4	7	h		152		1214
4	7	S−		152		1214
4	9	0	132			
4	9	e1	132		1313	
4	9	e2	132		1313	
4	9	h		143		1313
4	9	S−		143		1313
4	11	0	141			
4	11	e1	141		1412	
4	11	e2	141		1412	
4	11	h		134		1412

4	11	S-		134		1412
4	13	0	15			
4	13	h				1511
4	15	e1			161	
4	15	e2			161	
4	15	h		116		161
4	15	S-		116		161
4	17	S-		8		
5	4	0	5			
5	4	e1	5		115	
5	4	e2	5		115	
5	4	h		16		115
5	4	S-		16		115
5	6	0	113			
5	6	e1	113		1114	
5	6	e2	113		1114	
5	6	h		151		114
5	6	S-		151		114
5	8	0	122			
5	8	e1	122		1213	
5	8	e2	122		1213	
5	8	h		142		1213
5	8	S-		142		1213
5	10	0	131			
5	10	e1	131		1312	
5	10	e2	131		1312	
5	10	h		133		1312
5	10	S-		133		1312
5	12	0	14			
5	12	e1	14		1411	
5	12	e2	14		1411	
5	12	h		124		1411
5	12	S-		124		1411
5	14	e1			151	
5	14	e2			151	
5	14	h		115		151
5	14	S-		115		151
5	16	S-		7		
6	5	0	4			
6	5	e1	4		114	
6	5	e2	4		114	
6	5	h		15		114
6	5	S-		15		114
6	7	0	112			
6	7	e1	112		1113	
6	7	e2	112		1113	
6	7	h		141		1113
6	7	S-		141		1113
6	9	0	121			
6	9	e1	121		1212	
6	9	e2	121		1212	
6	9	h		132		1212
6	9	S-		132		1212
6	11	0	13			
6	11	e1	13		1311	
6	11	e2	13		1311	

6	11	h		123		1311
6	11	S-		123		1311
6	13	e1			141	
6	13	e2			141	
6	13	h		114		141
6	13	S-		114		141
6	15	S-		6		
7	6	0	3			
7	6	e1	3		113	
7	6	e2	3		113	
7	6	h		14		113
7	6	S-		14		113
7	8	0	111			
7	8	e1	111		1112	
7	8	e2	111		1112	
7	8	h		131		1112
7	8	S-		131		1112
7	10	0	12			
7	10	e1	12		1211	
7	10	e2	12		1211	
7	10	h		122		1211
7	10	S-		122		1211
7	12	e1			131	
7	12	e2			131	
7	12	h		113		131
7	12	S-		113		131
7	14	S-		5		
8	7	0	2			
8	7	e1	2		112	
8	7	e2	2		112	
8	7	h		13		112
8	7	S-		13		112
8	9	0	11			
8	9	e1	11		1111	
8	9	e2	11		1111	
8	9	h		121		1111
8	9	S-		121		1111
8	11	e1			121	
8	11	e2			121	
8	11	h		112		121
8	11	S-		112		121
8	13	S-		4		
9	8	0	1			
9	8	e1	1		111	
9	8	e2	1		111	
9	8	h		12		111
9	8	S-		12		111
9	10	e1			111	
9	10	e2			111	
9	10	h		111		111
9	10	S-		111		111
9	12	S-		3		
10	9	e1			11, *11	
10	9	e2			11, *11	
10	9	h		11		11
10	9	S-		11		11

10	11	S-		2		
11	10	S-		1		

End of WJ2

参考文献

[1] V.M.Kharlamov, "Additional congruences for the Euler characteristic of real algebraic manifolds of even dimensions," Funct.Anal.Appl.9(1975)134-141.

[2] V.M.Kharlamov, "The topological types of nonsingular surface of degree 4 in $\boldsymbol{RP}^3$," Funct.Anal.Appl.10(1976)295-305.

[3] S.Matsuoka (Saito), "Nonsingular algebraic curves in $\boldsymbol{RP}^1 \times \boldsymbol{RP}^1$," Trans.Amer.Math.Soc.324 (1991)87-107.

[4] S.Matsuoka (Saito), "The configurations of the M-curves of degree (4,4) in $\boldsymbol{RP}^1 \times \boldsymbol{RP}^1$ and periods of real K3 surfaces," Hokkaido Math.J.19(1990)361-378.

[5] S.Matsuoka (Saito), "bidegree (4,4) の実代数曲線で分岐する$\boldsymbol{P}^1 \times \boldsymbol{P}^1$ の2重被覆の coarse projective classification," 北海道大学数学講究録 19（複素多様体のトポロジー）(1990)39-52.

[6] S.Matuoka (Saito), "Congruences for M- and (M-1)-curves with odd branches on a hyperboloid," Bull.London Math.Soc.24(1992)61-67.

[7] V.V.Nikulin, "Integral symmmetric bilinear forms and some of their applications," Math.USSR Izv.14(1980)103-167.

[8] V.V.Nikulin, "Involutions of integral quadratic forms and their applications to real algebraic geometry," Math. USSR Izv. 22 (1984)

[9] V.A.Rokhlin, "Complex topological characteristics of real algebraic curves," Russian Math.Surveys 33(1978).